Hoe kom ik bij de min

De econofysica is een jong vakgebied, waarin met methoden uit de (theoretische) natuurkunde economische modellen worden bestudeerd. In één zo'n model, het minderheidsspel (*minority game*), proberen alle spelers een beslissing te nemen die door zo min mogelijk anderen genomen wordt. Deze situatie doet zich vaak voor, bijvoorbeeld op sommige financiële markten waar de kopers een voor hen gunstige prijs betalen als er minder kopers dan verkopers zijn. Het klassieke broertje van de Feynman-padintegraal, bekend uit de niet-evenwichts statistische natuurkunde, blijkt uitstekend geschikt om het gedrag van dit econofysische model exact mee te verklaren. *Jan-Alexander Heimel*

Jan-Alexander Heimel (1975) is in 1998 afgestudeerd in wiskunde en natuurkunde (cum laude) aan de Universiteit Utrecht met een afstudeeronderzoek in de statistische mechanica van neurale netwerken. In november 2001 promoveerde hij aan het King's College in Londen onder begeleiding van prof. dr. A.C.C. Coolen op onderzoek naar de dynamica van wanordelijke systemen. Sinds december 2001 werkt hij als postdoc theoretische neurofysiologie aan Brandeis University in Boston.

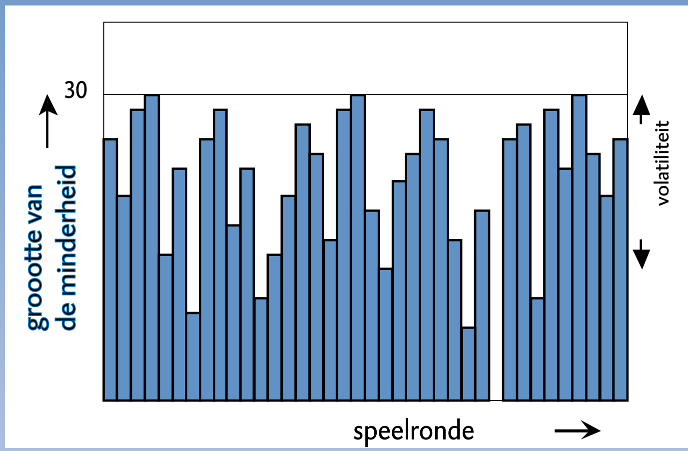
Kroegen hebben met enige regelmaat een rol gespeeld in de wetenschap bij het oplossen van problemen en het verzinnen van modellen. Slechts zelden echter zijn kroegen zelf een model geworden, zoals dat gebeurd is met de El *Farol*-bar in Santa Fé. Elke donderdagavond organiseert dit café een Ierse nacht. Een aantal wetenschappers uit het nabij gelegen Santa Fé-Instituut komt daar graag als het er niet al te druk is. Komt er minder dan een man of zestig, dan hebben ze allen een leuke avond. Als het er drukker is, wordt het erg dringen en waren de meesten liever op het instituut gebleven. De econoom Brian Arthur [1], die tot de kroeglopers behoorde, realiseerde zich dat het van te voren niet voor iedereen mogelijk is om tot een rationele beslissing te komen om naar de 'El Farol' te gaan of te blijven werken. Als namelijk iedereen verwacht dat het rustig wordt, besluit iedereen te komen en wordt het dus juist druk. Terwijl als allen verwachten dat het vanavond dringen zal worden, dan beleeft de bar een rustige nacht. Aangezien het niet voor iedereen mogelijk is om het juiste aantal te deduceren, zo dacht Arthur, kan het niet anders zijn dan dat mensen inductief te werk gaan, dat wil zeggen voorspellingen doen op basis van eerdere ervaringen en veronderstellingen. Als iemand op grond van een hypothese besluit te gaan en er zijn die avond inderdaad weinig mensen, dan wordt de gebruikte veronderstelling bevestigd. Is het druk dan wordt de hypothese ter zijde gelegd. Gaat iemand op basis van een hypothese niet en hoort hij of zij de volgende dag bij de lunch hoe geweldig de anderen op de tafels hebben staan dansen tot drie uur in de morgen, dan vertrouwen ze hun hypothese niet meer en gebruiken ze de week daarop mogelijk een andere. Hypotheses kunnen sterk uiteenlopen, zoals bijvoorbeeld: "het is druk als het vorige week stil was", of "het is altijd druk bij volle maan", "het is druk als de salarissen zijn uitgekeerd", of juist "als het stafcolloquium erg saai was", enzovoort.

Het minderheidsspel

Een soortgelijke situatie doet zich voor wanneer mensen 's ochtends in de auto stappen om van Utrecht naar Amsterdam te rijden. Ze hebben dan verschillende mogelijkheden: "nemen we de A2 of de sluiproute door Vinkeveen?". Degenen die de meerderheidsbeslissing kiezen hebben pech, want zij staan lang in de file, terwijl de minderheid snel op het werk is en eerder weer naar huis kan. Ook op (financiële) markten kan er sprake zijn van een minderheidsspel: zijn de kopers in de minderheid ten opzichte van de verkopers, dan zijn de kopers verzekerd van een lage prijs en waar voor hun geld; zijn de verkopers in de minderheid dan krijgen zij geld voor hun waar.

Het waren de fysici Challet en Zhang die dit soort situaties formaliseerden in de vorm van het minderheidsspel

derheid?



Figuur 1 **De volatiliteit is gerelateerd aan de standaard deviatie van de grootte van de minderheid in alle speelronden. Weergegeven is een voorbeeld van een spel met 61 spelers, waarbij dus de maximale minderheid 30 is.**

(*minority game*) [2]. Dit spel – in wezen eerder een model – wordt gespeeld in een aantal ronden. In elke ronde wordt informatie over een denkbeeldige toestand van de wereld vastgesteld aan de hand van een dobbelsteen met p zijden. Die informatie kan van alles inhouden: wegwerkzaamheden aan de A2, de stand van de AEX of de koers van de dollar. De N spelers hebben allen een aantal verschillende, willekeurig gekozen maar vaste strategieën om met die informatie om te gaan. Elke strategie geeft voor elke toestand van de wereld een keuze (A2 of sluiproute; kopen of verkopen). Elke speler maakt de keuze op grond van zijn favoriete strategie. De keuzes worden verzameld en het wordt bekend wat de minderheid heeft gekozen. Alleen spelers die de minderheidsbeslissing hebben genomen krijgen een punt. Degene met de meeste punten wint. Zo simpel. Elke speler past na afloop van elke ronde de 'waarde' van zijn strategieën aan of ze nu wel of niet gespeeld zijn: hij zal een groter belang hechten aan criteria die hem de keuze van de minderheid zouden hebben opgeleverd en voortaan minder letten op veronderstellingen die hem of haar in de meerderheid hadden doen belanden. Het is hierdoor goed mogelijk dat spelers de volgende ronde ingaan met een nieuwe (favoriete) strategie.

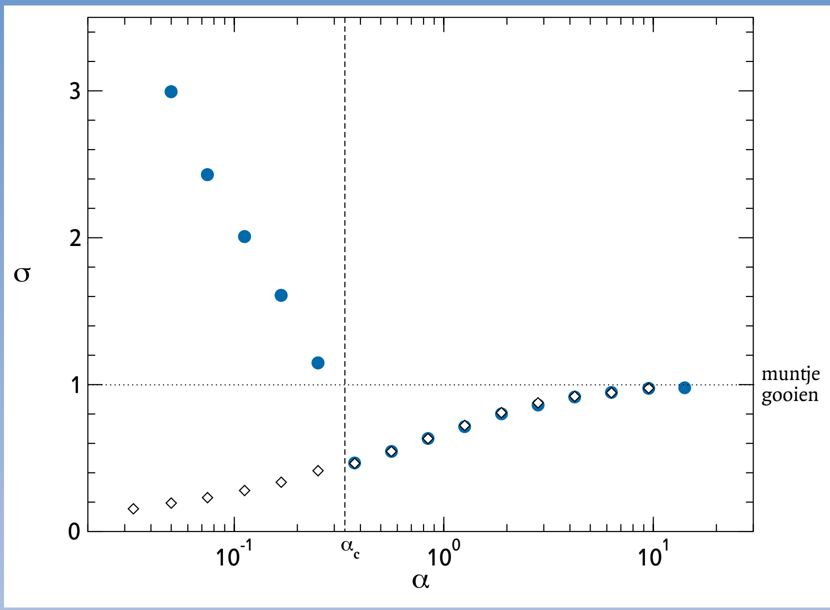
Het verloop van het spel

Het minderheidsspel laat zich makkelijker simuleren dan analytisch oplossen en werd aanvankelijk dan ook vooral numeriek bestudeerd. De eerste stap naar meer begrip en een analytische beschrijving van het verloop van het spel was dat men inzag dat als het aantal spelers N groot wordt, het aantal toestanden van de wereld p en N niet beide nodig zijn voor een beschrijving, maar dat $a = p/N$ de enige vrije parameter in het model is. Het gedrag van het spel blijkt goed gekarakteriseerd te kunnen worden door de standaarddeviatie van de grootte van de minderheid. Bij een markt, waar het prijspeil afhangt van vraag en aanbod, is deze grootheid gerelateerd aan de (prijs)volatiliteit, zie figuur 1. Als a groot is, dus als er relatief weinig spelers zijn, is deze volatiliteit gelijk aan de volatiliteit die men krijgt als alle spelers of speculanten bij het maken van een beslissing gewoon een muntje op zouden gooien. Er zijn blijkbaar zó veel mogelijke situaties ten opzichte van het aantal spelers dat nooit het gedrag van de andere spelers 'geleerd' kan worden. Elke hypothese blijft een gok. Neemt het aantal spelers toe, oftewel neemt de informatie per speler (a) af, dan vermindert de relatieve grootte van de volatiliteit, zie figuur 2. Dit blijkt zo door te gaan totdat a 0,34. Voor een kleinere waarde van a neemt kan de volatiliteit plotseling verder afnemen of juist gigantisch gaan groeien wanneer het aantal spelers verder toeneemt. De vraag wat daar gebeurt en waarom het precies dáár gebeurt kan niet door computersimulaties beantwoord worden. Daarvoor zijn wiskundige methoden noodzakelijk.

Verrassende transformatie

Een wiskundige analyse van het minderheidsspel wordt bemoeilijkt door de vele verschillende strategieën. Als we een spel van veel spelers willen beschrijven, dan zou de beschrijving enorm gecompliceerd worden als we van alle spelers, alle hypotheses zouden moeten specificeren. Ook wanneer de regels zijn uitgebreid om het minderheidsspel meer op een bestaande situatie te laten lijken, blijft het een praktisch probleem om de strategieën van alle spelers te weten te komen. Wat wel mogelijk is, is om een ruwe aanname te maken voor de verdeling van de strategieën. Voor een goed begrip van het gedrag van een spel met heel veel spelers is het dan mogelijk om te middelen over de mogelijke strategieën die ze zouden kunnen hebben. Het is alleen duidelijk dat te vroeg middelen, waarbij spelers hun gemiddelde keuze uitvoeren, volkomen onzinnige antwoorden kan opleveren. Wat is het gemiddelde van de A2 en de sluiproute? Is dat het weiland? De bestuurder over de snelweg, de carpooler door Vinkeveen? Een dergelijk probleem heeft zich eerder voorgedaan in de natuurkunde, onder andere bij het bestuderen van spinglazen.

Een spinglas is een systeem waarin verontreinigingen voor een bijzondere magnetische interactie tussen de verschillende atomen zorgen. De precieze interactie hangt af van de plaats van de vervuilende elementen. Het is praktisch onmogelijk deze plaatsen te meten en het interactiepatroon precies vast te stellen. Middelen over alle waarschijnlijke interactiepatronen is de enige oplossing. Om deze middeling uit te voeren voor een systeem dat zich in thermisch evenwicht bevindt, maakt men doorgaans gebruik van de zogeheten *replica-truc*. Deze techniek is door Challet, Marsili en Zecchina [3] met enig succes uitgevoerd op de stationaire toestand van het minderheidsspel.



Figuur 2 **De relatieve volatiliteit s (standaarddeviatie van de minderheidsgrootte gedeeld door N) uitgezet tegen a, de verhouding van het aantal toestanden p en het aantal spelers N. Wanneer N groot is, is deze grafiek onafhankelijk van de precieze waarde van N. Gevulde stippen markeren spellen begonnen zonder vooroordelen, open ruiten markeren spellen begonnen met voorkeursstrategieën. Voor a > ac is de uitkomst onafhankelijk van het begin.**

Het spel is echter geen fysisch systeem, en de stationaire toestand is niet in thermisch evenwicht. Het gebrek aan een thermisch evenwicht maakt toepassing van de standaard evenwichts-statistische mechanica op dit systeem onmogelijk. Het is eigenlijk noodzakelijk de dynamica ofwel het verloop van het spel te bestuderen. Er bestaat een heel efficiënte manier om dat te doen, die gebruik maakt van het klassieke broertje van de Feynman-padintegraal.
Ook deze methode is eerder gebruikt voor het bestuderen van spinglasmodellen. De padintegraal is een gewogen som van alle mogelijke verlopen die een spel vanaf het begin tot een bepaald punt in de verre toekomst kan nemen. Het is onmogelijk om deze integraal uit te rekenen voor één bepaalde realisatie van de gekozen strategieën, maar het blijkt zeer eenvoudig te zijn om de padintegraal over alle mogelijke realisaties te middelen. Bij het middelen over de gehele padintegraal gaat niets van de voor het begrip relevante informatie verloren. Doordat elke speler invloed uitoefent op alle andere spelers via het uitbrengen van een keuze en doordat we dit bekijken in de limiet van oneindig veel spelers, gebeurt er bij deze middeling iets heel bijzonders. Er vindt een transformatie plaats van een systeem van heel veel gekoppelde spelers, die elk slechts naar de minderheidsbeslissing in de laatste speelronde kijken, naar een systeem van ongekoppelde spelers, die ieder bij het maken van de keuze terugkijken naar hun eigen beslissingen in het verleden. Spelers kunnen hierdoor in hun isolement bestudeerd worden. In het beslissingsproces van een individuele speler zit de interactie met alle andere spelers verwerkt.

Voorspelbaar?

Nu kunnen we doordat de interactie met de andere spelers via de markt is weggetransformeerd, eenvoudiger het gedrag van de individuele spelers bestuderen. Zo vinden we 'bevroren' spelers die na een tijd spelen een enorme voorkeur hebben gekregen voor één bepaalde strategie en ook 'wispelturige' spelers die altijd maar van strategie blijven wisselen. Wanneer $a = a_c \approx 0{,}33740$ is het aantal niet-bevroren spelers exact even groot als het aantal mogelijke toestanden. Dat op dat punt een fase-overgang plaats vindt, blijkt in de theorie onder andere uit het feit, dat als er minder relevante informatie is ($a < ac$) het verloop van het spel altijd afhankelijk blijft van hoe het spel begonnen is. Dit effect werd later ook in simulaties teruggevonden. Als alle spelers bijvoorbeeld met duidelijke ideeën het spel waren begonnen en dit zich vertaalde in grote voorkeuren voor bepaalde, maar voor ieder verschillende, strategieën blijkt de volatiliteit veel lager te komen liggen, dan wanneer iedereen met een *open mind* aan het spel was begonnen, zie ook figuur 2. Dit effect blijft zichtbaar, hoe lang men ook speelt.
Heel verrassend is ook de vondst dat zelfs in het geval van heel veel mogelijke 'toestanden van de wereld' (grote *a*), waarbij de volatiliteit ononderscheidbaar is van een spel waarbij alle spelers muntjes opgooien, er toch nog steeds veel voorspelbaarheid in het spel zit. Hoewel een markt dus onvoorspelbaar kan lijken, is er voor slimme spelers, die niet aan dezelfde regels en veronderstellingen vast zitten als de meeste anderen, toch nog geld te verdienen. Het is niet verbazingwekkend dat er voor een dergelijke belofte niet alleen bij een minderheid veel belangstelling is. Wie daarvoor ook meer belangstelling heeft, kan terecht op een uitgebreide website [5] met veel informatie en links naar artikelen over het minderheidsspel. Wie echter niet de illusie koestert snel rijk te kunnen worden met het minderheidsspel en meer geïnteresseerd is in de padintegraaltechniek zelf en haar toepassing in verschillende wanordelijke systemen, kan een aantal artikelen vinden op mijn eigen pagina [6].

Referenties

1 W.B. Arthur, *Am. Econ. Assoc. Papers and Proc.* **84** (1994) 406.
2 D. Challet en Y.-C. Zhang, *Physica A* **246** (1997) 407.
3 D. Challet, M. Marsili en R. Zecchina, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 1824.
4 J.A.F. Heimel en A.C.C. Coolen, *Phys. Rev. E.* **63** (2001) 056121, A.C.C. Coolen en J.A.F. Heimel, *J. Phys. A.* (december) (2001).
5 *http://www.unifr.ch/econophysics/minority*
6 *http://people.brandeis.edu/~heimel/.*